2022 年岐阜大学医学部問題 *3*

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+8n+4\ (n=1,2,3,\cdots)$ で定めます。
自然数 m に対して $\dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}<\dfrac{1}{10^m}$ を満たす最小の自然数 n を b_m とします。
$S_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}b_k$ を求めてください。

解説・解答

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \bigl(a_{k+1} - a_k\bigr) = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \bigl(8k+4\bigr) = 4n^2 - 1 = \bigl(2n-1\bigr)\bigl(2n+1\bigr)$$

この式は $n = 1$ でも成り立っています。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$\displaystyle \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{10^m}$ より $\displaystyle n > \frac{10^m}{4} - \frac{1}{2}$ です。

$m = 1$ のとき $\displaystyle n > \frac{10}{4} - \frac{1}{2} = 2$ より $b_1 = 3$ です。

$m \geqq 2$ のとき $\displaystyle n > \frac{10^m}{4} - \frac{1}{2} = 25 \cdot 10^{m-2} - \frac{1}{2}$ より $b_m = 25 \cdot 10^{m-2}$ です。

$S_1 = b_1 = 3$

$m \geqq 2$ のとき

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} b_k = 3 + \sum_{k=2}^{m} 25 \cdot 10^{m-2} = 3 + \frac{25(10^{m-1} - 1)}{10 - 1} = \frac{25 \cdot 10^{m-1} + 2}{9}$$

この式は $m = 1$ でも成り立っています。