2021 年早稲田大学人間科学部問題 *3*

n は 1 以上の整数です。
$\dfrac{x}{4}+\dfrac{|y|}{5} \leqq n$， $x \geqq 0$ を満たす整数の組 (x, y) の個数 S_n を求めてください。

解説・解答

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{|y|}{5} \leqq n$, $x \geqq 0$ より $|y| \leqq 5n-\dfrac{5x}{4}$, $0 \leqq x \leqq 4n$ です。

$x=4k$ $(k=0,1,2,3,\cdots,n)$ のとき
$|y| \leqq 5n-\dfrac{5\cdot 4k}{4}=5n-5k$ なので
整数は $2(5n-5k)+1=10(n-k)+1$ 個です。

$x=4k-1$ $(k=1,2,3,\cdots,n)$ のとき
$|y| \leqq 5n-\dfrac{5(4k-1)}{4}=5n-5k+1+\dfrac{1}{4}$ なので
整数は $2(5n-5k+1)+1=10(n-k)+3$ 個です。

$x=4k-2$ $(k=1,2,3,\cdots,n)$ のとき
$|y| \leqq 5n-\dfrac{5(4k-2)}{4}=5n-5k+2+\dfrac{2}{4}$ なので
整数は $2(5n-5k+2)+1=10(n-k)+5$ 個です。

$x=4k-3$ $(k=1,2,3,\cdots,n)$ のとき
$|y| \leqq 5n-\dfrac{5(4k-3)}{4}=5n-5k+3+\dfrac{3}{4}$ なので
整数は $2(5n-5k+3)+1=10(n-k)+7$ 個です。

以上より
$S_n=(10n+1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big\{4\cdot 10(n-k)+1+3+5+7\Big\}=20n^2+6n+1$ です。