2021 年早稲田大学理工学部問題 *2*

整式 $f(x) = x^4 - x^2 + 1$， $g(x) = x^{2021} + (x^2 - 1)^{3n}$ (n は自然数) とします。
$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを求めてください。

解説・解答

-1 の 6 乗根 α は $\alpha^6+1=(\alpha^2+1)(\alpha^4-\alpha^2+1)=(\alpha^2+1)f(\alpha)=0$ を満たします。
$\pm i$ を除いた -1 の 6 乗根を α_k $(k=1,2,3,4)$ と置けば
$f(\alpha_k)=\alpha_k^4-\alpha_k^2+1=0$, $\alpha_k^2-1=\alpha_k^4$, $\alpha_k^6=-1$, $\alpha_k^{12}=1$ です。

$g(x)$ を $f(x)$ で割った商 $h(x)$, 余り ax^3+bx^2+cx+d と置きます。

$$\begin{aligned} g(\alpha_k) &= f(\alpha_k)h(\alpha_k)+a\alpha_k^3+b\alpha_k^2+c\alpha_k+d=a\alpha_k^3+b\alpha_k^2+c\alpha_k+d \\ &= \alpha_k^{2021}+(\alpha_k^2-1)^{3n}=\alpha_k^{12\cdot168+5}+\alpha_k^{4\cdot3n}=\alpha_k^5+1=\alpha_k^3-\alpha_k+1 \end{aligned}$$

$ax^3+bx^2+cx+d=x^3-x+1$ は 4 個の異なる値 $x=\alpha_k$ で成立するので恒等式です。
よって、余りは x^3-x+1 です。