2021 年早稲田大学理工学部問題 *1*

xy 平面上に点 $A(-1,-1), B(1,1), P(t,t^3)\ \ (0<t<1)$ をとります。
$\angle APB\ \ (0<\angle APB<\pi)$ を最小にする t の値を求めてください。

解説・解答

$A(-1,-1), B(1,1), P(t,t^3)\ \ (0<t<1)$ の位置関係を考慮して
AP, BP と x 軸のなす角をそれぞれ α, β $\left(\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置きます。
$(AP\text{ の傾き}) = \dfrac{t^3-(-1)}{t-(-1)} = t^2-t+1 = \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} = \tan\alpha$
$(BP\text{ の傾き}) = \dfrac{t^3-1}{t-1} = t^2+t+1 = \left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} = \tan\beta$

$\tan\angle APB = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{1+(t^2-t+1)(t^2+t+1)} = \dfrac{-2}{t^3+t+\frac{2}{t}}$

$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{2}<\angle APB<\dfrac{3\pi}{2}$ です。

$f(t)=t^3+t+\dfrac{2}{t}>0\ \ (0<t<1)$ と置き、微分して増減を調べます。

$f'(t)=3t^2+1-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{3t^4+t^2-2}{t^2}=\dfrac{(t^2+1)(3t^2-2)}{t^2}$

$f(t)$ は $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ で減少、$t=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ で極小、$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}<t<1$ で増加です。

よって $t=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $\tan\angle APB=\dfrac{-2}{f(t)}$ は最小です。

ゆえに $t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $\angle APB$ は最小です。