

2021 年早稲田大学商学部問題 1

座標空間に重複を許して 6 個の格子点 $P_0(0, 0, 0), P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ を配置します。
線分の長さが $P_k P_{k+1} = 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), $P_5 P_0 = 1$ となる配置は何通りありますか？

解説・解答

原点から6回の座標軸平行1移動で原点に戻る場合を考えれば良いです。
原点に戻るので、各軸方向の+1と-1の移動回数は同じです。

1つの軸上を動くとき (1つの軸で+1が3回)

軸の選び方が3通り、移動の順番が $\frac{6!}{(3!)^2} = 20$ 通りです。

よって $3 \times 20 = 60$ 通りです。

2つの軸上を動くとき (1つの軸で+1が2回、もう1つの軸で+1が1回)

軸の選び方が ${}_3C_2 \times 2 = 6$ 通り、移動の順番が $\frac{6!}{(2!)^2(1!)^2} = 180$ 通りです。

よって $6 \times 180 = 1080$ 通りです。

3つの軸上を動くとき (各軸で+1が1回ずつ)

軸の選び方が ${}_3C_3 = 1$ 通り、移動の順番が $\frac{6!}{(1!)^2(1!)^2(1!)^2} = 720$ 通りです。

よって $1 \times 720 = 720$ 通りです。

以上より $60 + 1080 + 720 = 1860$ 通りです。