

2021年早稲田大学商学部問題1

正の実数 x, y, z が $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$ を満たすとき
 $(x - 1)(y - 2)(z - 3)$ の最小値を求めてください。

解説・解答

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$ の両辺に xyz を掛けると $yz + 2zx + 3xy = xyz$ です。

相加平均・相乗平均の関係を使うと

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{y} \cdot \frac{3}{z}} \quad \left(\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z} のとき等号成立 \right)$$

よって $\sqrt[3]{36xyz} \geq 18$ です。

$$\begin{aligned} (x-1)(y-2)(z-3) &= xyz - (yz + 2zx + 3xy) + (6x + 3y + 2z) - 6 \\ &= (6x + 3y + 2z) - 6 \\ &\geq 3\sqrt[3]{6x \cdot 3y \cdot 2z} - 6 \quad (6x = 3y = 2z のとき等号成立) \\ &= 3\sqrt[3]{36xyz} - 6 \\ &\geq 3 \times 18 - 6 \quad (x = 3, y = 6, z = 9 のとき等号成立) \\ &= 48 \end{aligned}$$

以上より $(x, y, z) = (3, 6, 9)$ のときに最小値 $(x-1)(y-2)(z-3) = 48$ です。