

2021 年早稲田大学商学部問題 3

2021 以下の正の整数で、
正の約数の総和が奇数であるものの個数を求めてください。

解説・解答

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ を 0 以上の整数、 p_1, p_2, p_3, \dots を異なる奇素数とします。

$n = 2^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots$ の正の約数の総和は

$S = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{a_0})(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{a_2}) \cdots$ です。

$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{a_0}$ は奇数です。

$1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{a_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) は a_k が奇数なら偶数、 a_k が偶数なら奇数です。

よって S が奇数となるのは n が平方数または平方数の 2 倍のときです。

$44^2 = 1936 < 2021 < 2025 = 45^2$, $2 \cdot 31^2 = 1922 < 2021 < 2048 = 2 \cdot 32^2$ なので
条件を満たすものは $44 + 31 = 75$ 個です。