2021 年東京大学理系問題 *2*

x の 4 次式 $x^4+(a^2+1)(a+2)x-(a^2+1)\left(a+\dfrac{3}{4}\right)$ が
2 次式 (係数は有理数) の積に因数分解できる整数 a を求めてください。

解説・解答

2 次式 (係数は有理数) の積に因数分解できて x^3 の係数が 0 なので、
p, q, r を有理数として次のように表せます。

$$\begin{aligned} x^4+(a^2+1)(a+2)x-(a^2+1)\left(a+\frac{3}{4}\right) &= (x^2+px+q)(x^2-px+r) \\ &= x^4+(q+r-p^2)x^2+(pr-pq)x+qr \end{aligned}$$

係数を比べれば
$q+r-p^2=0\,,\quad p(r-q)=(a^2+1)(a+2)\,,\quad qr=-(a^2+1)\left(a+\dfrac{3}{4}\right)$ です。

$p \neq 0$ のとき
3 個の式を連立して q, r を消去し、a, p の式を作ると
$\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{(a^2+1)(a+2)}{p}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{(a^2+1)(a+2)}{p}\right)=-(a^2+1)\left(a+\dfrac{3}{4}\right)$ です。
整理すると $\left\{p^2-(a^2+1)\right\}\left\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\right\}=0$ です。
$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$ なので $p=\pm\sqrt{a^2+1}$ です。
$a^2<a^2+1 \leqq (|a|+1)^2$ ($a=0$ でのみ等号成立) なので $(a, p)=(0, \pm 1)$ です。

$p=0$ のとき
$(a^2+1)(a+2)=0$ より $a=-2$ です。
$x^4+\dfrac{5}{4}$ なので 2 次式 (係数は有理数) の積になりません。

以上より $a=0$ です。