2021 年東北大学理系問題 *2*

p, q は 3 以上の整数です。
平面上の三角形 ABC を考え、辺 AB を $\frac{1}{p} : 1-\frac{1}{p}$ に内分する点を P、辺 BC を $\frac{1}{q} : 1-\frac{1}{q}$ に内分する点を Q、辺 CA の中点を R とします。
三角形 ABC, PQR の面積をそれぞれ $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ と置きます。
$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle PQR}$ が整数となる (p, q) を求めてください。

解説・解答

三角形 ABC と三角形 APR で $\angle A$ は共通です。
$AB : AP = 1 : \frac{1}{p},\ AC : AR = 1 : \frac{1}{2}$ なので
$\triangle ABC : \triangle APR = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A : \frac{1}{2}AP \cdot AR \sin A = 1 : \frac{1}{2p}$ です。

三角形 ABC と三角形 BPQ で $\angle B$ は共通です。
$AB : BP = 1 : 1 - \frac{1}{p},\ BC : BQ = 1 : \frac{1}{q}$ なので
$\triangle ABC : \triangle BPQ = \frac{1}{2}BA \cdot BC \sin B : \frac{1}{2}BP \cdot BQ \sin B = 1 : (\frac{1}{q} - \frac{1}{pq})$ です。

三角形 ABC と三角形 CQR で $\angle C$ は共通です。
$BC : CQ = 1 : 1 - \frac{1}{q},\ AC : CR = 1 : \frac{1}{2}$ なので
$\triangle ABC : \triangle CQR = \frac{1}{2}CA \cdot CB \sin C : \frac{1}{2}CQ \cdot CR \sin C = 1 : (\frac{1}{2} - \frac{1}{2q})$ です。

$$\begin{aligned}\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} &= \frac{\triangle ABC}{\triangle ABC - \triangle APR - \triangle BPQ - \triangle CQR} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2p} - (\frac{1}{q} - \frac{1}{pq}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2q})} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{pq} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\frac{1}{p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

p, q は 3 以上の整数なので $p > 2,\ q > 2$ です。
$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
$(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\frac{1}{p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2q} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ です。
$(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\frac{1}{p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2} > (\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ です。

以上より $2 < \dfrac{\triangle ABC}{\triangle PQR} < 4$ なので $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \dfrac{2pq}{pq - p - q + 2} = 3$ です。
$2pq = 3(pq - p - q + 2)$ は $(p-3)(q-3) = 3$ に式変形できるので
$(p-3, q-3) = (1,3), (3,1)$ です。
ゆえに $(p, q) = (4,6), (6,4)$ です。