

2021年東北大学文系問題 2

正八角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ の
頂点 4 個で作る四角形で次の条件を満たすものは何通りありますか。
(条件) 四角形の頂点 3 個で直角三角形が作れる。

解説・解答

直径に対する円周角は 90° なので、
正八角形の外接円の直径に対する 2 頂点を含めば良いです。

四角形の対角線が外接円の直径の場合

対角線（直径）で分けられた 2 つの弧から 1 個ずつ頂点を選びます。
対角線（直径）の選び方は $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ の 4 通り、
分けられた一方の弧上の頂点の選び方が ${}_3C_1$ 通りなので
 $4 \cdot ({}_3C_1)^2 = 36$ 通り
対角線が 2 本とも直径なもの (${}_4C_2 = 6$ 通り) は重複して数えられています。
よって $36 - 6 = 30$ 通りです。

四角形の 1 辺が外接円の直径の場合

1 辺（直径）で分けられた 2 つの弧の片側から 2 頂点を選びます。
1 辺（直径）の選び方は $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ の 4 通り、
弧の選び方が 2 通り、弧上の頂点の選び方が ${}_3C_2$ 通りなので
 $4 \cdot 2 \cdot {}_3C_2 = 24$ 通りです。

以上より $30 + 24 = 54$ 通りです。