2021 年札幌医科大学問題 *1*

体積が $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$ の直円錐において、側面積の最小値を求めてください。

解説・解答

直円錐の頂点を A、A から底面に下した垂線の足を B、底面の円周上の点を C とします。

直円錐の高さを $AB=h$、底面の半径を $BC=r$ と置きます。
体積が $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$ なので $\dfrac{\pi r^2 h}{3}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$ です。
よって $h=\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}$ です。

側面を展開した扇形の半径を $CA=R,$ 中心角を θ と置きます。
三角形 ABC は直角三角形なので $AB^2+BC^2=CA^2$ です。
すなわち $R=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{\dfrac{2}{r^4}+r^2}$ です。

側面を展開した扇形の弧長と底面の円周は等しいので $R\theta=2\pi r$ です。
側面積は $\pi R^2\cdot\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{R^2\theta}{2}=\pi rR=\pi\sqrt{\dfrac{2}{r^2}+r^4}$ です。

$f(x)=\dfrac{2}{x}+x^2$ と置き、微分して $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$、増減を調べれば、
$0<x<1$ で減少、極小値 $f(1)=3$、$1<x$ で増加です。

側面積は $\pi\sqrt{f(r^2)}$ なので、$r=1$ のときに最小値 $\sqrt{3}\pi$ です。