

2021年立命館大学薬学部問題1

正の実数 x, y が $(\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 = 2$ を満たすとき
 xy の取り得る値の範囲を求めてください。

解説・解答

$k = \log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$ と置きます。

$$\begin{aligned}& (\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 \\&= (\log_{10} x)^2 + (k - \log_{10} x)^2 \\&= 2(\log_{10} x)^2 + 2k \log_{10} x + k^2 = 2\end{aligned}$$

$t = \log_{10} x$ は実数値なので、

t の二次方程式 $2t^2 + 2kt + (k^2 - 2) = 0$ が実数解を持つ k の範囲を求めます。

判別式 $D/4 = k^2 - 2(k^2 - 2) = 4 - k^2 \geq 0$ より $-2 \leq k \leq 2$ です。

$-2 \leq \log_{10} xy \leq 2$ より $10^{-2} \leq xy \leq 10^2$ なので $\frac{1}{100} \leq xy \leq 100$ です。