

2021年岡山大学文系問題 3

次の条件を満たす整数の組  $(a, b, c)$  を求めてください。

$$a^3 + b^3 + c^3 = (c + 1)^3 \quad (1 \leq a \leq b \leq c \leq 10)$$

## 解説・解答

$$b^3 < a^3 + b^3 = (c+1)^3 - c^3 = 3c(c+1) + 1 \leq 3 \cdot 10 \cdot 11 + 1 = 331$$

$6^3 = 216$ ,  $7^3 = 343$  なので  $1 \leq a \leq b \leq 6$  です。

連続した整数の積  $c(c+1)$  は2の倍数なので  $3c(c+1)$  は6の倍数です。

よって  $a^3 + b^3$  を6で割った余りは1です。

$$\text{整数 } n \text{ で } n^3 - n = (n-1)n(n+1)$$

$(n-1)n(n+1)$  は  $2 \cdot 3 = 6$  の倍数なので、 $n^3$  と  $n$  は6で割った余りが等しいです。

よって  $a^3 + b^3$  と  $a + b$  は6で割った余りが等しいので、 $a + b$  を6で割った余りは1です。

ゆえに  $(a, b) = (1, 6), (2, 5), (3, 4)$  に限定されます。

$(a, b) = (1, 6)$  のとき  $3c(c+1) = 1^3 + 6^3 - 1 = 216$  より  $c = 8$  です。

$(a, b) = (2, 5)$  のとき  $3c(c+1) = 2^3 + 5^3 - 1 = 132$  より 条件を満たす  $c$  はありません。

$(a, b) = (3, 4)$  のとき  $3c(c+1) = 3^3 + 4^3 - 1 = 90$  より  $c = 5$  です。

以上より  $(a, b, c) = (1, 6, 8), (3, 4, 5)$  です。