2021 年岡山大学理系問題 *1*

$-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす全ての a で
不等式 $\sin 3\theta \geqq a \sin\theta \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ が成り立つ θ の範囲を求めてください。

解説・解答

$f(a)=a\sin\theta-\sin 3\theta=a\sin\theta-3\sin\theta+4\sin^3\theta\ (-1\leqq a\leqq 1)$ と置きます。
ab 座標平面上で $b=f(a)$ は線分なので、線分の両端が最大・最小です。
よって $f(-1)\leqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$ を満たす θ の範囲を求めれば良いです。

$f(-1)=-4\sin\theta+4\sin^3\theta=4\sin\theta(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)\leqq 0$ より
$\sin\theta=-1,\ 0\leqq\sin\theta\leqq 1$ なので
$0\leqq\theta\leqq\pi,\ \theta=\dfrac{3\pi}{2},2\pi$ です。

$f(1)=-2\sin\theta+4\sin^3\theta=2\sin\theta(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)\leqq 0$ より
$-1\leqq\sin\theta\leqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi,\ \dfrac{5\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{7\pi}{4},\ \theta=2\pi$ です。

以上より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi,\ \theta=\dfrac{3\pi}{2},2\pi$ です。