2021 年新潟大学理系問題 3

サイコロを k 回投げて出た目の積を n とします。
平面上に正五角形 $ABCDE$ があり、A, B, C, D, E は時計回りに配置されています。
P を頂点 A に置き、時計回りに頂点上を n だけ進めたとき、
P が頂点 B にある確率を求めてください。

解説・解答

サイコロを k 回投げたとき
P が A,B,C,D,E にある確率をそれぞれ a_k,b_k,c_k,d_k,e_k と置きます。

n を 5 で割った余りが $r=0,1,2,3,4$ のときそれぞれ A,B,C,D,E にあります。

1 回でも 5 の目が出たら P は A にあります。
よって $a_k=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^k$ です。

P はいずれかの頂点上にあるので $a_k+b_k+c_k+d_k+e_k+e_k=1$ です。
よって $b_k+c_k+d_k+e_k=1-a_k=\dfrac{5^k}{6^k}$ です。

サイコロを 1 回投げて 1, 6 の目のとき P は B にあります。
よって $b_1=\dfrac{2}{6}$ です。

サイコロを $k+1$ 回投げたとき P が B にあるのは、k 回投げた後 $r=1$ で 1, 6 の目が出る、$r=2$ で 3 の目が出る、$r=3$ で 2 の目が出る、$r=4$ で 4 の目が出るときです。
よって $b_{k+1}=\dfrac{2b_k}{6}+\dfrac{c_k}{6}+\dfrac{d_k}{6}+\dfrac{e_k}{6}=\dfrac{b_k}{6}+\dfrac{b_k+c_k+d_k+e_k}{6}=\dfrac{b_k}{6}+\dfrac{5^k}{6^{k+1}}$ です。

6^{k+1} を掛けて $6^{k+1}b_{k+1}-6^kb_k=5^k$ に式変形します。
$k\geqq 2$ で $6^kb_k=6b_1+\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}5^j=2+\dfrac{5(5^{k-1}-1)}{5-1}=\dfrac{5^k+3}{4}$ です。
よって $b_k=\dfrac{5^k+3}{4\cdot 6^k}$ です。(この式は $k=1$ のときも成立しています)

以上より、P が頂点 B にある確率は $\dfrac{5^k+3}{4\cdot 6^k}$ です。