

2021年名古屋大学文系問題 2

$p = \log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2$, $q = \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_5 2}$ と置き、
 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ とします。
 $f(-\frac{3}{2})$, $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$ の正負を判定してください。

解説・解答

$$\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = 1$$

$$q = \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_5 2}$$
$$= \frac{\log_2 3 \log_3 5 + \log_3 5 \log_5 2 + \log_5 2 \log_2 3}{\log_2 3 \log_3 5 \log_5 2}$$

$$= \log_2 3 \log_3 5 + \log_3 5 \log_5 2 + \log_5 2 \log_2 3$$

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$$

$$= x^3 + (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + (\log_2 3 \log_3 5 + \log_3 5 \log_5 2 + \log_5 2 \log_2 3)x + \log_2 3 \log_3 5 \log_5 2$$

$$= (x + \log_2 3)(x + \log_3 5)(x + \log_5 2)$$

数値の大小関係を考えます。

$$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} < 1 = \log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 \sqrt{3^3} = \frac{3}{2} = \log_2 \sqrt{2^3} < \log_2 3$$

$f(x)$ は $-\log_2 3 < x < -\log_3 5$ で正、 $-\log_3 5 < x < -\log_5 2$ で負です。

$-\log_2 3 < -\frac{3}{2} < -\log_3 5 < -1 < -\frac{1}{2} < -\log_5 2$ なので

$f(-\frac{3}{2}) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(-\frac{1}{2}) < 0$ です。