

2021年京都大学理系問題 6

$n$  は 2 以上の自然数です。

$3^n - 2^n$  が素数ならば  $n$  は素数であることを示してください。

## 解説・解答

対偶「 $n$  が合成数ならば  $3^n - 2^n$  は合成数である」を示せば良いです。

$n = ab$  ( $a, b$  は  $2 \leq a \leq b$  の自然数) と置きます。

$$3^n - 2^n = 3^{ab} - 2^{ab}$$

$$= (3^a)^b - (2^a)^b$$

$$= (3^a - 2^a)(3^{a(b-1)} + 3^{a(b-2)}2^a + 3^{a(b-3)}2^{a \cdot 2} + \dots + 2^{a(b-1)})$$

$$3^a - 2^a \geq 3^2 - 2^2 = 5$$

$$3^{a(b-1)} + 3^{a(b-2)}2^a + 3^{a(b-3)}2^{a \cdot 2} + \dots + 2^{a(b-1)} \geq 3^2 + 2^2 = 13$$

よって  $3^n - 2^n$  は合成数です。

対偶を示せたので、 $3^n - 2^n$  が素数ならば  $n$  は素数です。