

2021年京都大学理系問題 6

n は 2 以上の自然数です。

$3^n - 2^n$ が素数ならば n は素数であることを示してください。

解説・解答

対偶「 n が合成数ならば $3^n - 2^n$ は合成数である」を示せば良いです。

$n = ab$ (a, b は $2 \leq a \leq b$ の自然数) と置きます。

$$\begin{aligned} 3^n - 2^n &= 3^{ab} - 2^{ab} \\ &= (3^a)^b - (2^a)^b \\ &= (3^a - 2^a)(3^{a(b-1)} + 3^{a(b-2)}2^a + 3^{a(b-3)}2^{a\cdot 2} + \cdots + 2^{a(b-1)}) \end{aligned}$$

$$3^a - 2^a \geq 3^2 - 2^2 = 5$$

$$3^{a(b-1)} + 3^{a(b-2)}2^a + 3^{a(b-3)}2^{a\cdot 2} + \cdots + 2^{a(b-1)} \geq 3^2 + 2^2 = 13$$

よって $3^n - 2^n$ は合成数です。

対偶を示せたので、 $3^n - 2^n$ が素数ならば n は素数です。