

2021 年京都大学理系問題 4

曲線 $y = \log(1 + \cos x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分の長さ L を求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos x}} dx \quad (\text{半角の公式を使います}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (t = \sin \frac{x}{2} \text{ に置換します}) \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{1 - t^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= 2 \log(\sqrt{2}+1) \text{ です。} \end{aligned}$$