

2021年京都大学理系問題 4

曲線  $y = \log(1 + \cos x)$  の  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の部分の長さ  $L$  を求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x}\right)^2} dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos x}} dx \quad (\text{半角の公式を使います}) \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (t = \sin \frac{x}{2} \text{に置換します}) \\&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{1 - t^2} dt \\&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt \\&= \left[ \log \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\&= \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \\&= 2 \log(\sqrt{2} + 1) \text{ です。}\end{aligned}$$