2021 年京都大学理系問題 *3*

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{n\pi}{6}$ を計算してください。

解説・解答

$z = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ と置きます。

ド・モアブルの定理より $z^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$ です。

$-1 \leqq \cos\dfrac{n\pi}{6} \leqq 1$,　$-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{6} \leqq 1$ なので

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6} + i\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}\right\} = 0$ です。

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6} + i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}+i}{4}} = \frac{14+3\sqrt{3}}{13} + \frac{5+2\sqrt{3}}{13}i$

よって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6} = \frac{14+3\sqrt{3}}{13}$ です。