

2021年京都大学理系問題 1

n は 4 以上の整数です。

赤玉, 白玉, 青玉, 黄玉が 1 個ずつ入った袋があります。

袋から玉を 1 個取り出し、色を記録し、袋に戻すという試行を繰り返します。

n 回目で初めて赤玉が取り出されて 4 種類の色が記録済みとなる確率を求めてください。

解説・解答

$n - 1$ 回で白, 青, 黄のうち1種類だけが記録済みとなる確率は

$$p_1 = {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{4^{n-1}} \text{ です。}$$

$n - 1$ 回で白, 青, 黄のうち2種類だけが記録済みとなる確率は

$$p_2 = {}_3C_2 \cdot \left\{ \left(\frac{2}{4}\right)^{n-1} - 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} = \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 6}{4^{n-1}} \text{ です。}$$

$n - 1$ 回で白, 青, 黄の3種類が記録済みとなる確率は

$$p_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - p_1 - p_2 = \frac{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3}{4^{n-1}} \text{ です。}$$

n 回目は赤なので、求める確率は $p_3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3}{4^n}$ です。