

2021年京都大学文系問題 5

p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数ではないことを示してください。

解説・解答

$p = 2$ のとき

$2^4 + 14 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ なので合成数です。

$p = 3$ のとき

$3^4 + 14 = 95 = 5 \cdot 19$ なので合成数です。

$p \geq 5$ のとき

p は 3 の倍数ではないので $p = 3n \pm 1$ (n は 2 以上の自然数) と表せます。

$$\begin{aligned} p^4 + 14 &= (3n \pm 1)^4 + 14 \\ &= (81n^4 \pm 108n^3 + 54n^2 \pm 12n + 1) + 14 \\ &= 3(27n^4 \pm 36n^3 + 18n^2 \pm 4n + 5) \end{aligned}$$

3 より大きな 3 の倍数なので合成数です。

以上より $p^4 + 14$ は素数ではないです。