

2021年京都大学文系問題 3

n は 2 以上の整数です。

n 個の箱 $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ があり、それぞれ 2 個の玉 (赤玉と白玉) が入っています。

$k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ に対して、 k が小さい方から順に次の操作を行います。

B_k から玉を 1 個取り出して B_{k+1} に入れます。

一連の操作が終了した後、 B_n から玉を 1 個取り出して B_1 に入れます。

このとき B_1 に赤玉と白玉が入っている確率を求めてください。

解説・解答

B_1 から取り出された色と同じ色が B_n から取り出される確率を求めれば良いです。

B_1 から取り出された色と同じ色が B_k から取り出される確率を p_k とします。

B_1 から取り出された色と異なる色が B_k から取り出される確率は $1 - p_k$ です。

条件より $p_1 = 1$, $p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k)$ です。

$p_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right)$ に式変形できます。

よって $p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ なので $p_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} + \frac{1}{2}$ です。

以上より、求める確率は $\frac{1 + 3^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}}$ です。