

### 2021年京都大学文系問題 3

$n$  は 2 以上の整数です。

$n$  個の箱  $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$  があり、それぞれ 2 個の玉（赤玉と白玉）が入っています。

$k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$  に対して、 $k$  が小さい方から順に次の操作を行います。

$B_k$  から玉を 1 個取り出して  $B_{k+1}$  に入れます。

一連の操作が終了した後、 $B_n$  から玉を 1 個取り出して  $B_1$  に入れます。

このとき  $B_1$  に赤玉と白玉が入っている確率を求めてください。

## 解説・解答

$B_1$  から取り出された色と同じ色が  $B_n$  から取り出される確率を求めれば良いです。

$B_1$  から取り出された色と同じ色が  $B_k$  から取り出される確率を  $p_k$  とします。

$B_1$  から取り出された色と異なる色が  $B_k$  から取り出される確率は  $1 - p_k$  です。

条件より  $p_1 = 1$ ,  $p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k)$  です。

$p_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right)$  に式変形できます。

よって  $p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  なので  $p_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} + \frac{1}{2}$  です。

以上より、求める確率は  $\frac{1 + 3^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}}$  です。