

2021年九州大学理系問題 5

p は素数です。

${}_nC_k = p$ ($1 \leq k \leq n$) を満たす自然数の組 (k, n) を求めてください。

解説・解答

$k = 1$ のとき

${}_n C_1 = n$ なので $n = p$ です。

$2 \leq k \leq n - 2$ のとき ($n \geq k + 2$)

$$\begin{aligned} {}_n C_k - n &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} - n \\ &= n \left(\frac{n-1}{k} \cdot \frac{n-2}{k-1} \cdot \frac{n-3}{k-2} \cdots \frac{n-k+1}{2} - 1 \right) \\ &\geq (k+2) \left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \cdots \frac{3}{2} - 1 \right) \\ &> (k+2) (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

よって $p = {}_n C_k > n$ です。

${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ に含まれる素因数は n 以下なので、条件を満たす n はありません。

$k = n - 1$ のとき

${}_n C_{n-1} = n$ なので $n = p$ です。

$k = n$ のとき

${}_n C_n = 1$ なので、条件を満たす n はありません。

以上より $(k, n) = (1, p), (p-1, p)$ です。