2021 年九州大学理系問題 *1*

座標空間で点 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2)$ を考え、
中心点 P の x, y, z 座標が全て正で xy, yz, zx 平面の全てと接する球を考えます。
この球と平面 ABC とが交わるとき、交わった部分の面積の最大値を求めてください。

解説・解答

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2)$ より、
平面 ABC の方程式は $x+y+\dfrac{z}{2}=1$、式変形して $2x+2y+z-2=0$ です。

xy, yz, zx 平面の全てと接するので、
球の半径を r と置けば、中心点は $P(r,r,r)$ と表せます。

P から平面 ABC に下した垂線の足を H と置きます。
点と平面の距離の公式より $PH=\dfrac{|2r+2r+r-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{|\,5r-2\,|}{3}$ です。
球と平面 ABC が交わるから $PH=\dfrac{|\,5r-2\,|}{3}<r$ なので $\dfrac{1}{4}<r<1$ です。

球と平面 ABC とが交わる部分は円です。
点 D をその円周上に取れば、円の半径は $HD,$ 面積は $\pi\cdot HD^2$ です。
D は球面上の点でもあるので $PD=r$ です。

三角形 PHD は直角三角形なので
$HD^2=PD^2-PH^2=r^2-\dfrac{(5r-2)^2}{3^2}=-\dfrac{16}{9}\left(r-\dfrac{5}{8}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{1}{4}$ です。

以上より、交わった部分の面積の最大値は $\dfrac{\pi}{4}$ です。