2021 年神戸大学後期理系問題 *5*

$f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{dt}{t^2 - t + 1} + \int_{x}^{1} \frac{dt}{t^2 + t + 1}$ の最小値を求めてください。

解説・解答

$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{dt}{t^2-t+1}+\int_{x}^{1}\frac{dt}{t^2+t+1}$ を微分して増減を調べます。

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{2x}{\{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{3}\}\{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\}}$

よって $f(x)$ は $x<0$ で減少、$x=0$ で極小、$0<x$ で増加なので、

最小値は $f(0)=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2-t+1}+\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+t+1}$ です。

$t+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}\tan\theta}{2}\ (-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ に置換します。

$$\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+t+1}=\int_{0}^{1}\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}}{\frac{3\tan^2\theta}{4}+\frac{3}{4}}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

$t=-s$ に置換します。

$$\int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2-t+1}=\int_{1}^{0}\frac{-ds}{s^2+s+1}=\int_{0}^{1}\frac{ds}{s^2+s+1}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

以上より、最小値は $f(0)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ です。