

2021 年神戸大学後期理系問題 1

「全ての整数  $n$  について  $f(n)$  は 5 の倍数となる」を条件  $P$  とします。  
 $x^4$  の係数が 1 である整数係数の 4 次式  $f(x)$  は条件  $P$  を満たさないことを示してください。

## 解説・解答

$f(x) = x^4 + (3 \text{ 次以下の項})$  が条件  $P$  を満たすと仮定します。

5の倍数引く5の倍数は5の倍数、 $f(n)$  は全ての整数  $n$  で5の倍数なので、

$f_1(n) = f(n+1) - f(n) = 4n^3 + (2 \text{ 次以下の項})$  は全ての整数  $n$  で5の倍数、

$f_2(n) = f_1(n+1) - f_1(n) = 12n^2 + (1 \text{ 次以下の項})$  は全ての整数  $n$  で5の倍数、

$f_3(n) = f_2(n+1) - f_2(n) = 24n + (\text{定数項})$  は全ての整数  $n$  で5の倍数、

$f_4(n) = f_3(n+1) - f_3(n) = 24$  です。

$f_4(n)$  は5の倍数のはずですが24となり矛盾するので仮定が間違っています。

よって  $x^4$  の係数が1である整数係数の4次式は条件  $P$  を満たしません。