

2021年神戸大学後期理系問題 1

「全ての整数 n について $f(n)$ は 5 の倍数となる」を条件 P とします。
 x^4 の係数が 1 である整数係数の 4 次式 $f(x)$ は条件 P を満たさないことを示してください。

解説・解答

$f(x) = x^4 + (3\text{次以下の項})$ が条件 P を満たすと仮定します。

5 の倍数引く 5 の倍数は 5 の倍数、 $f(n)$ は全ての整数 n で 5 の倍数なので、

$f_1(n) = f(n+1) - f(n) = 4n^3 + (2\text{次以下の項})$ は全ての整数 n で 5 の倍数、

$f_2(n) = f_1(n+1) - f_1(n) = 12n^2 + (1\text{次以下の項})$ は全ての整数 n で 5 の倍数、

$f_3(n) = f_2(n+1) - f_2(n) = 24n + (\text{定数項})$ は全ての整数 n で 5 の倍数、

$f_4(n) = f_3(n+1) - f_3(n) = 24$ です。

$f_4(n)$ は 5 の倍数のはずですが 24 となり矛盾するので仮定が間違っています。

よって x^4 の係数が 1 である整数係数の 4 次式は条件 P を満たしません。