2021 年関西大学文系問題 *1*

内接円の半径が 1 である三角形 ABC で、
辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし、$\angle BCA = C$ とします。
$a^2 + b^2 = 2c^2$ を満たすとき、C が最大となる a の値を求めてください。

解説・解答

$0^\circ < C < 180^\circ$ で $\cos C$ は単調減少なので、$\cos C$ が最小のとき C が最大になります。
余弦定理を使い、$a^2+b^2=2c^2$ を使い、相加平均相乗平均の関係を使います。

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}}{2ab} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{4} \geqq \frac{2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}}{4} = \frac{1}{2} \quad (a=b \text{ で等号成立})$$

$a=b$ のとき、$a^2+b^2=2c^2$ より　$a=b=c$ です。
よって、正三角形 $(a=b=c)$ のときに最大値 $C=60^\circ$ です。

$$\triangle ABC = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{a^2\sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} \text{ です。}$$

内接円の中心点を P と置きけば $\triangle ABC = \triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB$ です。
$\triangle PBC, \triangle PCA, \triangle PAB$ の底辺はそれぞれ $a, b, c,$ 高さは内接円の半径 $r=1$ なので

$$\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{3a}{2} \text{ です。}$$

$$\frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} = \frac{3a}{2} \text{ より }\ a = 2\sqrt{3} \text{ です。}$$