2021 年関西学院大学文系問題 *1*

$OA=OB=AB=4,\ OC=BC=CA=2\sqrt{2}$ である四面体 $OABC$ の
辺 OA, AB を $3:1$ に内分する点をそれぞれ P, Q とし、辺 AC の中点を R とします。
三角形 PQR の面積を求めてください。

解説・解答

三角形 $OAB\,(OA=OB=AB=4)$ は正三角形なので $\angle OAB=60^\circ$ です。
三角形 $ABC\,(AB=4,\ BC=CA=2\sqrt{2})$ は直角二等辺三角形なので $\angle BAC=45^\circ$ です。
三角形 $OAC\,(OA=4,\ OC=CA=2\sqrt{2})$ は直角二等辺三角形なので $\angle OAC=45^\circ$ です。

P,Q はそれぞれ OA,AB を $3:1$ に内分するので $OP=AQ=3,\ PA=QB=1$ です。
R は AC の中点なので $AR=RC=\sqrt{2}$ です。

三角形 $PAQ\,(AP=1,\ AQ=3,\ \angle PAQ=\angle OAB=60^\circ)$ に余弦定理を使います。
$PQ=\sqrt{1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\,\cos 60^\circ}=\sqrt{7}$

三角形 $QAR\,(AQ=3,\ AR=\sqrt{2},\ \angle QAR=\angle BAC=45^\circ)$ に余弦定理を使います。
$QR=\sqrt{3^2+\sqrt{2}^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\,\cos 45^\circ}=\sqrt{5}$

三角形 $PAR\,(AP=1,\ AR=\sqrt{2},\ \angle PAR=\angle OAC=45^\circ)$ に余弦定理を使います。
$RP=\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2-2\cdot1\cdot\sqrt{2}\,\cos 45^\circ}=1$

三角形 $PQR\,(PQ=\sqrt{7},\ QR=\sqrt{5},\ RP=1)$ に余弦定理を使います。
$\cos\angle PQR=\dfrac{\sqrt{7}^2+\sqrt{5}^2-1^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{11}{2\sqrt{35}}$ なので $\sin\angle PQR=\sqrt{1-\cos^2\angle PQR}=\dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}}$

以上より $\triangle PQR=\dfrac{PQ\cdot QR\,\sin\angle PQR}{2}=\dfrac{\sqrt{19}}{4}$ です。