2021 年慶應義塾大学薬学部問題 *1*

$4\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=1 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすとき

$\sin\theta$ の値を求めてください。

解説・解答

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$， $0 \leqq \cos\theta \leqq 1$ です。

二倍角の公式より $2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \sin\theta$， $2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \cos\theta$ なので

$4\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}\right) - 1 = 4\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} + 4\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = 2\sin\theta + 2\cos\theta + 1 = 0$

よって $\sin\theta = -\cos\theta - \dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{1}{2}$ です。

$(2\sin\theta + 1)^2 = (-2\cos\theta)^2 = 4(1 - \sin^2\theta)$ より $8\sin^2\theta + 4\sin\theta - 3 = 0$ です。

二次方程式の解の公式を使い $\sin\theta = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$ です。

$\sin\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$ なので $\sin\theta = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{4}$ です。