2021 年慶應義塾大学理工学部問題 *4*

$x \geqq 0$ の範囲で $\log\left(1+\dfrac{x}{2}\right) \leqq ax$ が成り立つ a の最小値を求めてください。

解説・解答

$x>0$ で $\log\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ は単調増加だから
$ax \geqq \log\left(1+\dfrac{x}{2}\right) > \log\left(1+\dfrac{0}{2}\right)=0$ なので $a>0$ です。

$f(x)=ax-\log\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ と置き
$x>0$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ となる a を考えれば良いです。
$f(0)=0$, $f'(x)=a-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{ax+2a-1}{x+2}$ です。

$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき
$f(x)$ は範囲 $0<x<\dfrac{1-2a}{a}$ で減少, $x=\dfrac{1-2a}{a}$ で極小, 範囲 $\dfrac{1-2a}{a}<x$ で増加 です。
$f\left(\dfrac{1-2a}{a}\right)<f(0)=0$ なので条件を満たしません。

$\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき
$f(x)$ は範囲 $x>0$ で増加です。
$f(x)\geqq f(0)=0$ なので条件を満たします。

以上より $\dfrac{1}{2}\leqq a$ のときに条件を満たすので a の最小値は $\dfrac{1}{2}$ です。