2021 年慶應義塾大学理工学部問題 *2*

x は $x^2+3x+3=0$ 満たす複素数です。
$(x+2)^m(x+3)^n=3$ となる整数の組 (m,n) を求めてください。

解説・解答

二次方程式 $x^2+3x+3=0$ を解いて $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$ です。

$$x+2=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\,,\quad |x+2|=1$$

$$x+3=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}\right),\quad |x+3|=\sqrt{3}$$

$|(x+2)^m(x+3)^n|=1^m\cdot\sqrt{3}^{\,n}=3$ より　$n=2$ です。

$$\begin{aligned}(x+2)^m(x+3)^2&=\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m\cdot\left\{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2\\&=\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=3\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{m+1}\\&=3\left(\cos\frac{(m+1)\pi}{3}\pm i\sin\frac{(m+1)\pi}{3}\right)\\&=3\text{ より }\frac{(m+1)\pi}{3}=2k\pi\ (k\text{ は整数})\text{ です。}\end{aligned}$$

以上より、k を整数として $(m,n)=(\,6k-1,\,2\,)$ です。