2021 年慶應義塾大学経済学部問題 *4*

k, n は自然数、x は奇数です。
$2\log_5 x - \log_5(6x - 5^k) < k - 1$ を満たす x の個数を a_k とします。

$n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が 10 桁の自然数となる n を求めてください。

解説・解答

$2\log_5 x - \log_5(6x-5^k) < k-1$ は $\log_5 x^2 < \log_5\{(6x-5^k)5^{k-1}\}$ に式変形できるので
$x^2 < (6x-5^k)5^{k-1}$ です。真数条件は $x>0,\ 6x-5^k>0$ です。
左辺にまとめて因数分解すると $(x-5^{k-1})(x-5^k)<0$ なので $5^{k-1}<x<5^k$ です。

x は奇数なので $x=5^{k-1}+2,\ 5^{k-1}+4,\ 5^{k-1}+6,\ \cdots,\ 5^k-2$ です。
よって $a_n = \dfrac{(5^k-2)-(5^{k-1}+2)}{2}+1 = 2\cdot 5^{k-1}-1$ です。

$$n+\sum_{k=1}^{n} a_k = n+\sum_{k=1}^{n}(2\cdot 5^{k-1}-1) = n+\left\{\frac{2(5^n-1)}{5-1}-n\right\} = \frac{5^n-1}{2}$$

10 桁の自然数なので $10^9 \leqq \dfrac{5^n-1}{2} < 10^{10}$ です。
2 を掛けて 1 を加えると $2\cdot 10^9+1 \leqq 5^n < 2\cdot 10^{10}+1$ です。
自然数なので $2\cdot 10^9 < 5^n \leqq 2\cdot 10^{10}$ です。
5^9 で割って $1024 = 2^{10} < 5^{n-9} \leqq 2^{10}\cdot 10 = 10240$ です。

$5^4=625,\ 5^5=3125,\ 5^6=15625$ なので $n-9=5$ です。
以上より $n=5+9=14$ です。