

2021年慶應義塾大学経済学部問題3

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めてください。

$$a_2 = 1, \quad a_6 = 2, \quad \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(n-2)(n+1)^2 a_{n+1}}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

解説・解答

$$a_1 = \sum_{k=1}^1 a_k = \frac{(1-2)(1+1)^2 a_2}{4} = \frac{-1 \cdot 2^2 \cdot 1}{4} = -1$$

$n \geq 3$ のとき

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{(n-2)(n+1)^2 a_{n+1}}{4} - \frac{(n-3)n^2 a_n}{4}$$

$(n+1)n(n-1)a_{n+1} = n(n-1)(n-2)a_n$ に式変形できるので
 $n(n-1)(n-2)a_n = 6(6-1)(6-2)a_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 240$ です。
よって $a_n = \frac{240}{n(n-1)(n-2)}$ です。

以上より $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{240}{n(n-1)(n-2)}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) です。