*2021* 年慶應義塾大学医学部問題 *1*

点 $O$ を中心とする半径 1 の円に内接する三角形 $ABC$ で
$5\overrightarrow{OA} - 7\overrightarrow{OB} - 8\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ が成り立っています。
三角形 $ABC$ の面積を求めてください。

解説・解答

三角形 $ABC$ は半径 1 の円に内接しているので $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ です。

$|5\overrightarrow{OA}|^2=|7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}|^2$ より
$5^2\cdot|\overrightarrow{OA}|^2=7^2\cdot|\overrightarrow{OB}|^2+2\cdot7\cdot8\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+8^2\cdot|\overrightarrow{OC}|^2$ なので
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{5^2\cdot|\overrightarrow{OA}|^2-7^2\cdot|\overrightarrow{OB}|^2-8^2\cdot|\overrightarrow{OC}|^2}{2\cdot7\cdot8}=\dfrac{5^2\cdot1^2-7^2\cdot1^2-8^2\cdot1^2}{2\cdot7\cdot8}=-\dfrac{11}{14}$ です。

$\triangle OBC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot1^2-\left(-\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{28}$

$BC$ を $8:7$ に内分する点を $P$ と置けば
$\overrightarrow{OA}=\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{5}=3\cdot\dfrac{7\overrightarrow{OB}+8\overrightarrow{OC}}{8+7}=3\overrightarrow{OP}$ なので $OA=3OP$ です。
よって $OP:PA=OP:(OA-OP)=1:2$ です。

$\angle APC=\angle OPB=\theta$ と置きます。
$\triangle OBC:\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot OP\sin\theta:\frac{1}{2}BC\cdot PA\sin\theta=OP:PA=1:2$ です。

以上より $\triangle ABC=2\triangle OBC=2\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{28}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ です。