2021 年一橋大学問題 5

サイコロを 3 回振り出た目を順に a, b, c とします。
$\displaystyle\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c)\,dx = 0$ となる確率を求めてください。

解説・解答

$x = t + a$ と置きます。

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{3} (t+a-b)(t+a-c)\,d(t+a)$$

$$= \int_{-3}^{3} \Big(t^2 + (2a-b-c)t + (a-b)(a-c)\Big)\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{3} \Big(t^2 + (a-b)(a-c)\Big)\,dt$$

$$= 2\Big[\frac{t^3}{3} + (a-b)(a-c)t\Big]_0^3$$

$$= 2\Big(9 + 3(a-b)(a-c)\Big) = 0$$

よって $(a-b)(a-c) = -3$ なので $(a-b,\ a-c) = (3,-1),(1,-3),(-1,3),(-3,1)$ です。

$(a-b,\ a-c) = (3,-1)$ のとき
$(b,c) = (a-3,\ a+1)$ なので $(a,b,c) = (4,1,5),(5,2,6)$ の 2 通りです。

$(a-b,\ a-c) = (1,-3)$ のとき
$(b,c) = (a-1,\ a+3)$ なので $(a,b,c) = (2,1,5),(3,2,6)$ の 2 通りです。

$(a-b,\ a-c) = (-1,3)$ のとき
$(b,c) = (a+1,\ a-3)$ なので $(a,b,c) = (4,5,1),(5,6,2)$ の 2 通りです。

$(a-b,\ a-c) = (-3,1)$ のとき
$(b,c) = (a+3,\ a-1)$ なので $(a,b,c) = (2,5,1),(3,6,2)$ の 2 通りです。

以上より、求める確率は $\dfrac{2\cdot 4}{6^3} = \dfrac{1}{27}$ です。