2021 年一橋大学問題 *3*

a, b を実数とし、2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 α, β を持ち、
$1, \alpha, \beta$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するとき、
$\dfrac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$ の値の範囲を求めてください。

解説・解答

2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 α, β を持つので
解と係数の関係より $\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = b$ です。
判別式 $a^2 - 4b \geqq 0$ より $b \leqq \dfrac{a^2}{4}$ です。

$1, \alpha, \beta$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するとき
辺の長さは正の数 $\alpha > 0,\ \beta > 0$ なので $b = \alpha\beta > 0$ です。
三角不等式より $|\alpha - \beta| < 1 < \alpha + \beta = a$ です。
$|\alpha - \beta|^2 - 1^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta - 1 = a^2 - 4b - 1 < 0$ より $0 < \dfrac{a^2 - 1}{4} < b$ です。

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{b + 1}{a^2} \leqq \frac{\frac{a^2}{4} + 1}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{1^2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{b + 1}{a^2} > \frac{\frac{a^2 - 1}{4} + 1}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4a^2} > \frac{1}{4}$$

以上より $\dfrac{1}{4} < \dfrac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2} < \dfrac{9}{4}$ です。