2021 年一橋大学問題 2

n は自然数です。
実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ と表します。
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} 2^{[\sqrt{k}\,]}$ を求めてください。

解説・解答

m を自然数とし、$m^2 \leqq k < (m+1)^2$ のとき $[\sqrt{k}\,] = m$ です。

$$\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} 2^{[\sqrt{k}\,]} = \sum_{k=m^2}^{m^2+2m} 2^m = \{(m^2+2m)-m^2+1\}2^m = (2m+1)2^m$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} 2^{[\sqrt{k}\,]} = \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} 2^{[\sqrt{k}\,]}\right) = \sum_{m=1}^{n}(2m+1)2^m$$ と置きます。

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_n - a_n \\ &= 2\sum_{m=1}^{n}(2m+1)2^m - \sum_{m=1}^{n}(2m+1)2^m \\ &= \sum_{m=2}^{n+1}(2m-1)2^m - \sum_{m=1}^{n}(2m+1)2^m \\ &= (2n+1)2^{n+1} + \sum_{m=2}^{n}\{(2m-1)-(2m+1)\}2^m - 6 \\ &= (2n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1^2} 2^{[\sqrt{k}\,]} = 2^{[\sqrt{1^2}\,]} = 2$$

$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = \sum_{k=1}^{n^2} 2^{[\sqrt{k}\,]} = a_{n-1} + 2^{[\sqrt{n^2}\,]} = \{(2n-3)2^n+2\} + 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

この式は $n=1$ でも成り立っています。

以上より $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ です。