

2021 年一橋大学問題 1

1000 以下の素数は 250 個以下であることを示してください。

解説・解答

1000以下の自然数で2,3,5の倍数の集合をそれぞれA,B,Cとします。

$$n(A) = \left\lceil \frac{1000}{2} \right\rceil = 500, \quad n(B) = \left\lceil \frac{1000}{3} \right\rceil = 333, \quad n(C) = \left\lceil \frac{1000}{5} \right\rceil = 200 \text{です。}$$

6の倍数の個数は $n(A \cap B) = \left\lceil \frac{1000}{6} \right\rceil = 166$ です。

15の倍数の個数は $n(B \cap C) = \left\lceil \frac{1000}{15} \right\rceil = 66$ です。

10の倍数の個数は $n(C \cap A) = \left\lceil \frac{1000}{10} \right\rceil = 100$ です。

30の倍数の個数は $n(A \cap B \cap C) = \left\lceil \frac{1000}{30} \right\rceil = 33$ です。

2,3,5の倍数の個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 500 + 333 + 200 - 166 - 66 - 100 + 33 = 734 \text{です。} \end{aligned}$$

3個{2,3,5}は素数なので、2,3,5の倍数で合成数は $734 - 3 = 731$ 個です。

$5 < p_i < \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31.6\cdots$ の素数 p_i を書き出し、

$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8) = (7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31)$ と置きます。

$p_j \cdot p_k$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, $j \leq k \leq 8$) は

1000以下の合成数であり2,3,5の倍数ではありません。

これは $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ 個あります。

1000以下の合成数が $731 + 36 = 767$ 個以上あるので、

素数は $1000 - 767 = 233$ 個以下です。

以上より、1000以下の素数は250個以下です。

1000以下の素数を書き出すと168個あります。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997