

2021 年一橋大学問題 1

1000 以下の素数は 250 個以下であることを示してください。

解説・解答

1000 以下の自然数で 2, 3, 5 の倍数の集合をそれぞれ A, B, C とします。

$$n(A) = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500, \quad n(B) = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, \quad n(C) = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200 \text{ です。}$$

$$6 \text{ の倍数の個数は } n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \text{ です。}$$

$$15 \text{ の倍数の個数は } n(B \cap C) = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66 \text{ です。}$$

$$10 \text{ の倍数の個数は } n(C \cap A) = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100 \text{ です。}$$

$$30 \text{ の倍数の個数は } n(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33 \text{ です。}$$

2, 3, 5 の倍数の個数は

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 500 + 333 + 200 - 166 - 66 - 100 + 33 = 734 \text{ です。} \end{aligned}$$

3 個 $\{2, 3, 5\}$ は素数なので、2, 3, 5 の倍数で合成数は $734 - 3 = 731$ 個です。

$5 < p_i < \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31.6\dots$ の素数 p_i を書き出し、

$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8) = (7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31)$ と置きます。

$p_j \cdot p_k$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, j \leq k \leq 8$) は

1000 以下の合成数であり 2, 3, 5 の倍数ではありません。

これは $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ 個あります。

1000 以下の合成数が $731 + 36 = 767$ 個以上あるので、

素数は $1000 - 767 = 233$ 個以下です。

以上より、1000 以下の素数は 250 個以下です。

1000 以下の素数を書き出すと 168 個あります。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997