*2021*年広島大学後期理系問題 *1*

$a$ は正の実数です。
座標平面で、点 $P$ は曲線 $y = -\dfrac{x^2}{a} + 2$ 上を動き、点 $Q$ は曲線 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動きます。

$P$ と $Q$ との距離の最小値をを求めてください。

解説・解答

$y=-\dfrac{x^2}{a}+2$ は頂点 $(0,2)$ で上に凸な放物線です。
$x^2+y^2=1$ は中心点 $O(0,0)$, 半径 $OQ=1$ の円です。

$$OP^2=x^2+\left(-\frac{x^2}{a}+2\right)^2=\frac{1}{a^2}\left(x^2-\frac{4a-a^2}{2}\right)^2+\frac{8a-a^2}{4}$$

$\dfrac{4a-a^2}{2}>0$ の場合 $0<a<4,\ x=\sqrt{\dfrac{4a-a^2}{2}}$ のときに $OP$ は最小値 $\dfrac{\sqrt{8a-a^2}}{2}$ です。
$\dfrac{4a-a^2}{2}\leqq 0$ の場合 $a\geqq 4,\ x=0$ のときに $OP$ は最小値 2 です。

$OP\leqq 1$ のとき、共有点があるので $PQ$ の最小値は 0 です。
$OP>1$ のとき、$PQ=OP-OQ=OP-1$ です。

$0<a<4$ を考慮して $\dfrac{\sqrt{8a-a^2}}{2}\leqq 1$ を解けば $0<a\leqq 4-2\sqrt{3}$ です。

以上より $PQ$ の最小値は

$$\begin{cases} 0 & (0<a\leqq 4-2\sqrt{3}) \\ \dfrac{\sqrt{8a-a^2}}{2}-1 & (4-2\sqrt{3}<a<4) \\ 1 & (4\leqq a) \end{cases}$$

です。