2021 年浜松医科大学医学部問題 *1*

x, y, z は正の実数です。
不等式 $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz} \geqq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

$$
\begin{aligned}
&\quad x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} \\
&= (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx}) \\
&= (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})\cdot\tfrac{1}{2}\{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2\} \\
&\geqq 0 \quad (x=y=z \text{ のとき等号成立})
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ です。

$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ の x, y, z をそれぞれ $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}$ に置き換えると

$\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{xyz}}$ なので $\sqrt[3]{xyz} \geqq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ です。

以上より $\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz} \geqq \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ です。