

2021年北海道大学後期理系問題 4

$k^2 + 176 = 25 \cdot 3^n$ を満たす自然数の組 (k, n) を求めてください。

解説・解答

j, m を自然数とします。

$$k = 2j - 1 \text{ のとき } k^2 + 176 = (2j - 1)^2 + 4 \cdot 44 = (4 \text{ の倍数}) + 1$$

$$k = 2j \text{ のとき } k^2 + 176 = (2j)^2 + 4 \cdot 44 = (4 \text{ の倍数})$$

$$n = 2m - 1 \text{ のとき } 25 \cdot 3^n = 25 \cdot 3^{2m-1} = (4 \cdot 6 + 1) \cdot 3 \cdot (4 \cdot 2 + 1)^{n-1} = (4 \text{ の倍数}) + 3$$

$$n = 2m \text{ のとき } 25 \cdot 3^n = 25 \cdot 3^{2m} = (4 \cdot 6 + 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1)^n = (4 \text{ の倍数}) + 1$$

$$\text{よって } (k, n) = (2j - 1, 2m) \text{ と置けます。 } (2j - 1)^2 + 176 = 25 \cdot 3^{2m}$$

$$25 \cdot 3^{2m} - (2j - 1)^2 = (5 \cdot 3^m - 2j + 1)(5 \cdot 3^m + 2j - 1) = 2^4 \cdot 11$$

$5 \cdot 3^m$, $2j - 1$ は共に奇数なので $5 \cdot 3^m - 2j + 1$, $5 \cdot 3^m + 2j - 1$ は共に偶数です。

$$5 \cdot 3^m + 2j - 1 \geq 5 \cdot 3 + 2 - 1 = 16, \quad 5 \cdot 3^m - 2j + 1 < 5 \cdot 3^m + 2j - 1 \text{ なので}$$

$$(5 \cdot 3^m - 2j + 1, 5 \cdot 3^m + 2j - 1) = (2, 88), (4, 44), (8, 22) \text{ に限定されます。}$$

$$(5 \cdot 3^m - 2j + 1, 5 \cdot 3^m + 2j - 1) = (2, 88) \text{ のとき } (j, m) = (22, 2) \text{ です。}$$

$$(5 \cdot 3^m - 2j + 1, 5 \cdot 3^m + 2j - 1) = (4, 44) \text{ のとき 条件を満たす } (j, m) \text{ はありません。}$$

$$(5 \cdot 3^m - 2j + 1, 5 \cdot 3^m + 2j - 1) = (8, 22) \text{ のとき } (j, m) = (4, 2) \text{ です。}$$

以上より $(k, n) = (7, 2), (43, 4)$ です。