

2021年岐阜大学教育学部問題 4

$4^x - 6 \cdot 2^x + 2 - 6 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = 0$ を満たす実数 x を求めてください。

解説・解答

$2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ なので

相加平均・相乗平均の関係より $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ です。

$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2$ ($x = 0$ のとき等号成立) と置けば

$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ です。

$4^x - 6 \cdot 2^x + 2 - 6 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = t^2 - 6t = (t - 6)t = 0$ です。

$t \geq 2$ なので $t = 2^x + 2^{-x} = 6$ です。

2^x を掛けて $(2^x)^2 + 1 = 6 \cdot 2^x$ です。

2^x についての二次方程式 $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$ を解くと

$2^x = 3 \pm 2\sqrt{2}$ です。

$3 + 2\sqrt{2} > 3 - 2\sqrt{2} > 0$ なので $x = \log_2(3 \pm 2\sqrt{2})$ です。