

2021年岐阜大学教育学部問題4

$4^x - 6 \cdot 2^x + 2 - 6 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = 0$  を満たす実数  $x$  を求めてください。

## 解説・解答

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$  なので

相加平均・相乗平均の関係より  $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$  です。

$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2$  ( $x = 0$  のとき等号成立) と置けば

$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$  です。

$4^x - 6 \cdot 2^x + 2 - 6 \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = t^2 - 6t = (t - 6)t = 0$  です。

$t \geq 2$  なので  $t = 2^x + 2^{-x} = 6$  です。

$2^x$  を掛けて  $(2^x)^2 + 1 = 6 \cdot 2^x$  です。

$2^x$  についての二次方程式  $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$  を解くと

$2^x = 3 \pm 2\sqrt{2}$  です。

$3 + 2\sqrt{2} > 3 - 2\sqrt{2} > 0$  なので  $x = \log_2(3 \pm 2\sqrt{2})$  です。