2021 年岐阜大学医学部問題 *3*

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。

a_1 から a_n までの積を M_n とし、$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k$ を求めてください。

解説・解答

$a_1=4>2,\quad a_k>2$ のとき $a_{k+1}=4-\dfrac{4}{a_k}>4-\dfrac{4}{2}=2$ なので
数学的帰納法により全ての自然数 n で $a_n>2$ です。

$a_{n+1}=4-\dfrac{4}{a_n}$ の両辺から 2 を引き 2 で割ります。 $\dfrac{a_{n+1}-2}{2}=1-\dfrac{2}{a_n}=\dfrac{a_n-2}{a_n}$
逆数にします。 $\dfrac{2}{a_{n+1}-2}=\dfrac{a_n}{a_n-2}=\dfrac{2+(a_n-2)}{a_n-2}=\dfrac{2}{a_n-2}+1$
数列 $\left\{\dfrac{2}{a_n-2}\right\}$ は公差 1 の等差数列なので $\dfrac{2}{a_n-2}=\dfrac{2}{a_1-2}+(n-1)\cdot 1=n$ です。
よって $a_n=\dfrac{2}{n}+2=\dfrac{2(n+1)}{n}$ です。

$$M_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots a_n=\frac{2\cdot 2}{1}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3}\cdot\frac{2\cdot 5}{4}\cdot\frac{2\cdot 6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2(n+1)}{n}=(n+1)\cdot 2^n$$

$$\begin{aligned}S_n=2S_n-S_n&=2\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot 2^k-\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot 2^k\\&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot 2^{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}(k+2)\cdot 2^{k+1}\\&=(n+1)\cdot 2^{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}-(0+2)\cdot 2^{0+1}\\&=(n+1)\cdot 2^{n+1}-\frac{4\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}-4\\&=n\cdot 2^{n+1}\end{aligned}$$