

2021年同志社大学文系問題 1

$x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ のとき $x^6 + \frac{64}{x^6}$ の値を求めてください。

解説・解答

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$x + \frac{2}{x} = (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{5}$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{2}{x} = (2\sqrt{5})^2 - 4 = 16$$

$$x^6 + \frac{64}{x^6} = \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^3 - 3x^2 \cdot \frac{4}{x^2} \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) = 16^3 - 12 \cdot 16 = 3904 \text{ です。}$$