

2021年同志社大学文系問題2

数列 $\{a_n\}$ を次のように定めます。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

この数列の一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$a_1 = 2 > 1$ です。

自然数 k で $a_k > 1$ だと仮定すると
 $a_{k+1} - 1 = \frac{2a_k + 1}{a_k + 2} - 1 = \frac{a_k - 1}{a_k + 2} > 0$ なので $a_{k+1} > 1$ です。
よって、数学的帰納法により全ての自然数 n で $a_n > 1$ です。

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{a_n + 2}{a_n - 1} = \frac{3}{a_n - 1} + 1 \text{ です。}$$

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} + \frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{2}\right) \text{ に式変形できるので}$$

$$\frac{1}{a_n - 1} + \frac{1}{2} = 3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{2}\right) = 3^{n-1}\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3^n}{2} \text{ です。}$$

$$\text{ゆえに } a_n = \frac{1}{\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}} + 1 = \frac{3^n + 1}{3^n - 1} \text{ です。}$$