2021 年旭川医科大学問題 *3*

n, p は正の整数です。
不等式 $\dfrac{2n^{p+1}\sqrt{n}}{2p+3} < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p\sqrt{k} < \dfrac{2(n+1)^{p+1}\sqrt{n+1}}{2p+3}$ を証明してください。

解説・解答

$f(x) = x^p\sqrt{x} = x^{\frac{2p+1}{2}}$ $(x \geqq 0)$ と置き、

$F(n) = \displaystyle\int_0^n f(x)dx = \int_0^n x^{\frac{2p+1}{2}}dx = \left[\frac{2x^{\frac{2p+3}{2}}}{2p+3}\right]_0^n = \frac{2n^{\frac{2p+3}{2}}}{2p+3} = \frac{2n^{p+1}\sqrt{n}}{2p+3}$ と置きます。

$f(x)$ は単調増加なので、範囲 $k < x < k+1$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ では $f(x) > f(k)$ です。

$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx > \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)$ です。

$f(0) = 0$ なので $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k) < \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^{n+1} f(x)dx = F(n+1)$ です。

$f(x)$ は単調増加なので、範囲 $k-1 < x < k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ では $f(x) < f(k)$ です。

$\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)dx < \int_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k)$ です。

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) > \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_0^{n} f(x)dx = F(n)$ です。

以上より $\displaystyle F(n) < \sum_{k=1}^{n} f(k) < F(n+1)$ なので

$\displaystyle\frac{2n^{p+1}\sqrt{n}}{2p+3} < \sum_{k=1}^{n} k^p\sqrt{k} < \frac{2(n+1)^{p+1}\sqrt{n+1}}{2p+3}$ です。