2020 年横浜市立大学医学部問題 *1*

最初、2 つの袋 A, B それぞれに 4 個の玉 (赤玉 1 個, 白玉 3 個) が入っています。
袋 A, B から 1 つずつ玉を取り出し、交換して袋に戻すことを繰り返し行います。
n 回目の交換の後、袋 A に赤玉がちょうど 1 個入っている確率を求めてください。

解説・解答

n 回目の交換の後、袋 A に赤玉が $0,1,2$ 個入っている状態をそれぞれ P,Q,R とし、その確率をそれぞれ p_n,q_n,r_n とします。

状態 P は A(赤 0 個、白 4 個), B(赤 2 個、白 2 個) です。
状態 Q は A(赤 1 個、白 3 個), B(赤 1 個、白 3 個) です。
状態 R は A(赤 2 個、白 2 個), B(赤 0 個、白 4 個) です。

最初、袋 A の赤玉は 1 個なので $(p_0,q_0,r_0)=(0,1,0)$ です。
袋 A の赤玉は $0,1,2$ 個のいずれかなので $p_n+q_n+r_n=1$ です。

1 回の交換で P から Q になるのは
(A,B) から (白, 赤) を取り出す場合なので確率は $\dfrac{4}{4}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ です。

1 回の交換で Q から Q になるのは
(A,B) から (白, 白), (赤, 赤) を取り出す場合なので確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{5}{8}$ です。

1 回の交換で R から Q になるのは
(A,B) から (赤, 白) を取り出す場合なので確率は $\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{4}{4}=\dfrac{1}{2}$ です。

$q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{5}{8}q_n+\dfrac{1}{2}r_n=\dfrac{1}{8}q_n+\dfrac{1}{2}(p_n+q_n+r_n)=\dfrac{1}{8}q_n+\dfrac{1}{2}$

$q_{n+1}-\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{8}\left(q_n-\dfrac{4}{7}\right)$ に式変形できるので $q_n-\dfrac{4}{7}=\left(\dfrac{1}{8}\right)^n\left(q_0-\dfrac{4}{7}\right)$ です。

よって $q_n=\left(\dfrac{1}{8}\right)^n\left(1-\dfrac{4}{7}\right)+\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n+\dfrac{4}{7}$ です。

以上より、求める確率は $\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n+\dfrac{4}{7}$ です。