

2020年横浜市立大学医学部問題 1

\vec{a}, \vec{b} は平面上のベクトルです。

$3\vec{a} + 2\vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるとき、
 $|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値を求めてください。

解説・解答

$3\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{x}$, $2\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{y}$ と置けば $\vec{a} = \frac{3\vec{x} + 2\vec{y}}{13}$, $\vec{b} = \frac{2\vec{x} - 3\vec{y}}{13}$ です。

\vec{x}, \vec{y} は単位ベクトルなので $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1$, $-1 \leq \vec{x} \cdot \vec{y} \leq 1$ です。

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= \left| \frac{5\vec{x} - \vec{y}}{13} \right|^2 \\ &= \frac{25|\vec{x}|^2 - 10\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2}{13^2} \\ &= \frac{25 \cdot 1^2 - 10\vec{x} \cdot \vec{y} + 1^2}{13^2} \\ &= \frac{26 - 10\vec{x} \cdot \vec{y}}{13^2} \\ &\leq \frac{26 - 10 \cdot (-1)}{13^2} \\ &= \frac{36}{13^2} \end{aligned}$$

以上より $|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値は $\frac{6}{13}$ です。