*2020* 年早稲田大学国際教養学部問題 *5*

区別できない 4 個の箱と、1 から 4 までの番号が 1 つずつ書かれた 4 個の球があります。
以下の手順で 4 個の球を番号順に箱に入れます。
番号 1 の球を任意の箱に入れます。
番号 $k$ $(k=2,3,4)$ の球を球の入った箱には確率 $\dfrac{\text{入っている球の個数}}{k+1}$ で入れ、

残りの確率 $\dfrac{2}{k+1}$ で任意の空箱に入れます。

空箱が 2 つになるように 4 個の球が入ったとき、
1 つの箱に 3 個、もう 1 つの箱に 1 個の球が入っている条件付き確率を求めてください。

解説・解答

番号 $k$ の球が、$n$ 個の球が入った箱に入る確率を $p_{kn}$ と置きます。
$p_{10}=1,\ p_{20}=\dfrac{2}{3},\ p_{21}=\dfrac{1}{3},\ p_{30}=\dfrac{2}{4},\ p_{31}=\dfrac{1}{4},\ p_{32}=\dfrac{2}{4},\ p_{40}=\dfrac{2}{5},\ p_{41}=\dfrac{1}{5},\ p_{42}=\dfrac{2}{5}$

空箱が 2 つになる球の入り方を書き出して確率を計算します。

1 つの箱に $\{1,2,3\}$、もう 1 つの箱に $\{4\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{21}p_{32}p_{40}=\dfrac{1}{15}$
1 つの箱に $\{1,2,4\}$、もう 1 つの箱に $\{3\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{21}p_{30}p_{42}=\dfrac{1}{15}$
1 つの箱に $\{1,3,4\}$、もう 1 つの箱に $\{2\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{20}p_{31}p_{42}=\dfrac{1}{15}$
1 つの箱に $\{2,3,4\}$、もう 1 つの箱に $\{1\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{20}p_{31}p_{42}=\dfrac{1}{15}$

1 つの箱に $\{1,2\}$、もう 1 つの箱に $\{3,4\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{21}p_{30}p_{41}=\dfrac{1}{30}$
1 つの箱に $\{1,3\}$、もう 1 つの箱に $\{2,4\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{20}p_{31}p_{41}=\dfrac{1}{30}$
1 つの箱に $\{1,4\}$、もう 1 つの箱に $\{2,3\}$ の球が入っている確率 $p_{10}p_{20}p_{31}p_{41}=\dfrac{1}{30}$

以上より、求める確率は $\dfrac{\frac{1}{15}\cdot 4}{\frac{1}{15}\cdot 4+\frac{1}{30}\cdot 3}=\dfrac{8}{11}$ です。