2020 年早稲田大学社会科学部問題 2

n は自然数です。
$f(x) = |x-2| + |x-2^2| + |x-2^3| + \cdots\cdots + |x-2^{2n+1}|$
の最小値を求めてください。

解説・解答

三角不等式 $\{\,|a|+|b| \geqq |a+b| \ \ (ab \geqq 0$ のとき等号成立$)\,\}$ により、$k=1,2,3,\cdots,n$ で
$\left|x-2^k\right|+\left|x-2^{n+1+k}\right|=\left|2^{n+1+k}-x\right|+\left|x-2^k\right| \geqq \left|(2^{n+1+k}-x)+(x-2^k)\right|=2^{n+1+k}-2^k$
($2^k \leqq x \leqq 2^{n+1+k}$ のとき等号成立)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left|x-2\right|+\left|x-2^2\right|+\left|x-2^3\right|+\cdots+\left|x-2^{2n+1}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|x-2^k\right|+\left|x-2^{n+1}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|x-2^{n+1+k}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\left|x-2^k\right|+\left|x-2^{n+1+k}\right|\right)+\left|2^{n+1}-x\right| \\
&\geqq \sum_{k=1}^{n}\left(2^{n+1+k}-2^k\right)+\left|x-2^{n+1}\right| \qquad (\ 2^n \leqq x \leqq 2^{n+2} \text{ のとき等号成立 }) \\
&\geqq \sum_{k=1}^{n}\left(2^{n+1+k}-2^k\right) \qquad (\ x=2^{n+1} \text{ のとき等号成立 }) \\
&= 2\left(2^{n+1}-1\right)\sum_{k=1}^{n}2^{k-1} \\
&= 2\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^n-1\right)
\end{aligned}
$$

以上より、最小値は $f\left(2^{n+1}\right)=2\left(2^n-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)$ です。